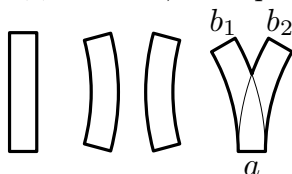


Первый тур 26.11.2025. Высшая лига.

1. Докажите, что при любых натуральных n и k из чисел $k+1, k+2, \dots, k+n$ можно выбрать несколько (хотя бы одно) чисел так, чтобы их сумма делилась на $1+2+\dots+n$.

2. Дано натуральное число k . В рельсовом конструкторе есть обычные куски рельсов (прямые и изогнутые), а также *развилки*, см. рисунок (все дуги имеют градусную меру 30°). В развилку есть один вход a с одной стороны и два выхода b_1 и b_2 с другой; в каждый момент времени a соединён по развилке с одним из b_i . Если поезд заезжает на a , он выезжает по соединённому с ним b_i . Если поезд заезжает на один из b_j , он выезжает через a , и a становится соединён именно с этим b_j . Петя собрал из конструктора железнодорожную сеть и запустил по ней k поездов (едущих с одинаковыми скоростями) так, что поезда ездят бесконечно долго, не сталкиваясь и не сходя с рельсов, и на каждой развилке переключения происходят бесконечное число раз. Какое наибольшее количество развилки он мог использовать? (Все радиусы дуг одинаковы, все прямые детали имеют одинаковую длину.)



3. Для множества $A \subseteq \{0, 1, \dots, 2025! - 1\}$ назовём целое число A -подходящим, если его остаток при делении на $2025!$ принадлежит A . Назовём множество A универсальным, если любой многочлен с вещественными коэффициентами, принимающий целые значения во всех A -подходящих точках, принимает целые значения и во всех целых точках. Найдите наименьшую возможную мощность универсального множества.

4. В пространстве даны n точек A_1, A_2, \dots, A_n . Докажите, что квадрат наименьшего радиуса шара, содержащего все эти точки, равен наибольшему значению выражения

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i \mu_j \cdot A_i A_j^2$$

по всем наборам $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ неотрицательных чисел с единичной суммой.

5. Барон Мюнхгаузен придумал перестановку $\alpha(1), \alpha(2), \dots$ всех натуральных чисел. Он утверждает, что если ему дадут перестановку $\beta(1), \beta(2), \dots$ натуральных чисел, он сможет подобрать такую бесконечную последовательность натуральных чисел $u_1 < u_2 < \dots$, что неравенство $\beta(i) < \beta(j)$ выполнено тогда и только тогда, когда и неравенство $\alpha(u_i) < \alpha(u_j)$. Могут ли слова барона быть правдой?

6. Найдите все функции $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, обладающие следующим свойством: для любых положительных чисел x и y таких, что $2x \leq y \leq 3x$, справедливы неравенства

$$2f(x) \leq f(y) \leq 3f(x).$$

7. Дано натуральное число $a > 2025$. Докажите, что существуют натуральные числа N , b и c такие, что $a < b < c$, и все три числа $N + a!$, $N + b!$, $N + c!$ являются точными квадратами.

8. Найдите все вещественные $\alpha > 0$, для которых любой выпуклый 2025-угольник можно разрезать на дельтоиды, у каждого из которых найдётся пара равных углов, не меньших α . Напомним, что *дельтоидом* называется выпуклый четырёхугольник, хотя бы одна из диагоналей которого является его осью симметрии.

9. На окружности ω выбраны точки $A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ именно в таком порядке. Прямые B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 образуют треугольник Δ . Точка P лежит внутри каждого из треугольников $AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3$, причём образы P при изогональном сопряжении относительно этих треугольников лежат на одной прямой. Докажите, что P лежит на описанной окружности треугольника Δ .

10. Пусть n, k и s — натуральные числа, причём $s < k$. Для каждого $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ определено вещественное число $f(a_1, a_2, \dots, a_k)$, причём $f(1, 1, \dots, 1) \neq 0$. Известно, что если зафиксировать любые s из чисел a_1, a_2, \dots, a_k и просуммировать значения f по всем n^{k-s} таким наборам, то получится 0. Найдите наименьшее возможное количество наборов (a_1, a_2, \dots, a_k) , для которых $f(a_1, a_2, \dots, a_k) \neq 0$.

Первый тур 26.11.2025. Первая лига.

1. Докажите, что при любых натуральных n и k из чисел $k + 1, k + 2, \dots, k + n$ можно выбрать несколько (хотя бы одно) чисел так, чтобы их сумма делилась на $1 + 2 + \dots + n$.

2. Назовём *правым сапогом* вертикальную полоску из $k \geq 1$ клетки, к нижней клетке которой справа приклеена ещё одна клетка. *Левый сапог* определяется аналогично, только приклеиваемая клетка находится слева, и $k \geq 2$ (то есть горизонтальная доминошка — правый сапог, но не левый). Рассмотрим клетчатую лесенку ширины 100: это доска 100×100 , из которой убрали все клетки строго над главной диагональю, идущей из левого нижнего угла в правый верхний. Докажите, что в любом её разбиении на правые и левые сапоги найдутся хотя бы 50 левых сапогов.

3. Для множества $A \subseteq \{0, 1, \dots, 2025! - 1\}$ назовём целое число A -подходящим, если его остаток при делении на $2025!$ принадлежит A . Назовём множество A универсальным, если любой многочлен с вещественными коэффициентами, принимающий целые значения во всех A -подходящих точках, принимает целые значения и во всех целых точках. Найдите наименьшую возможную мощность универсального множества.

4. На плоскости даны n точек A_1, A_2, \dots, A_n . Докажите, что квадрат наименьшего радиуса круга, содержащего все эти точки, равен наибольшему значению выражения

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i \mu_j \cdot A_i A_j^2,$$

по всем наборам $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ неотрицательных чисел с единичной суммой.

5. Действительные числа a_0, a_1, \dots, a_n и x , где $0 < x < 1$, удовлетворяют условию

$$\frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{1-x^2} + \dots + \frac{a_n}{1-x^{n+1}} = 0.$$

Докажите, что существует действительное число y такое, что $0 < y < 1$ и $a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n = 0$.

6. Найдите все функции $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, обладающие следующим свойством: для любых положительных чисел x и y таких, что $2x \leq y \leq 3x$, справедливы неравенства

$$2f(x) \leq f(y) \leq 3f(x).$$

7. Чему равно минимальное значение выражения

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{i+1}}{\text{НОД}(a_i, a_{i+1})},$$

где минимум берётся по всем k и по всем строго возрастающим последовательностям (a_1, \dots, a_k) натуральных чисел таким, что $a_1 = 1$ и $a_k = 2025^{2025}$?

8. Найдите все вещественные $\alpha > 0$, для которых любой выпуклый 2025-угольник можно разрезать на дельтоиды, у каждого из которых найдётся пара равных углов, не меньших α . Напомним, что *дельтоидом* называется выпуклый четырёхугольник, хотя бы одна из диагоналей которого является его осью симметрии.

9. На окружности ω выбраны точки $A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ именно в таком порядке. Прямые $B_1 C_1, B_2 C_2, B_3 C_3$ образуют треугольник Δ . Точка P лежит внутри каждого из треугольников $AB_1 C_1, AB_2 C_2, AB_3 C_3$, причём образы P при изогональном сопряжении относительно этих треугольников лежат на одной прямой. Докажите, что P лежит на описанной окружности треугольника Δ .

10. Пусть n, k и s — натуральные числа, причём $s < k$. Для каждого $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ определено вещественное число $f(a_1, a_2, \dots, a_k)$, причём $f(1, 1, \dots, 1) \neq 0$. Известно, что если зафиксировать любые s из чисел a_1, a_2, \dots, a_k и просуммировать значения f по всем n^{k-s} таким наборам, то получится 0. Найдите наименьшее возможное количество наборов (a_1, a_2, \dots, a_k) , для которых $f(a_1, a_2, \dots, a_k) \neq 0$.